

Alternative Aufgabe

$$f(x) = x^2$$

Tangente: $P(a | f(a))$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$= 2a(x - a) + a^2$$

$$= 2ax - 2a^2 + a^2$$

$$t(x) = 2ax - a^2$$

Schnittpunkt von $f(x)$ und $f(a) = a$.

Fläche der Parabel von 0 bis a , da von y -Achse begrenzt.

Schnittpunkt der Tangente mit y -Achse

$$0 = 2ax - a^2$$

$$2ax = a^2$$

$$2x = a$$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$A_p = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{3}$$

$$A_T = \int_{\frac{a}{2}}^a (2ax - a^2) dx = \left[ax^2 - a^2x \right]_{\frac{a}{2}}^a$$

$$= \left(a^3 - a^3 \right) - \left(a\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^3}{2} \right)$$

$$= 0 - \left(\frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{4}a^3 + \frac{2}{4}a^3$$

$$= \frac{1}{4}a^3$$

$$A = A_p - A_T$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4}$$

$$= \frac{4a^3}{12} - \frac{3a^3}{12}$$

$$A = \frac{a^3}{12}$$