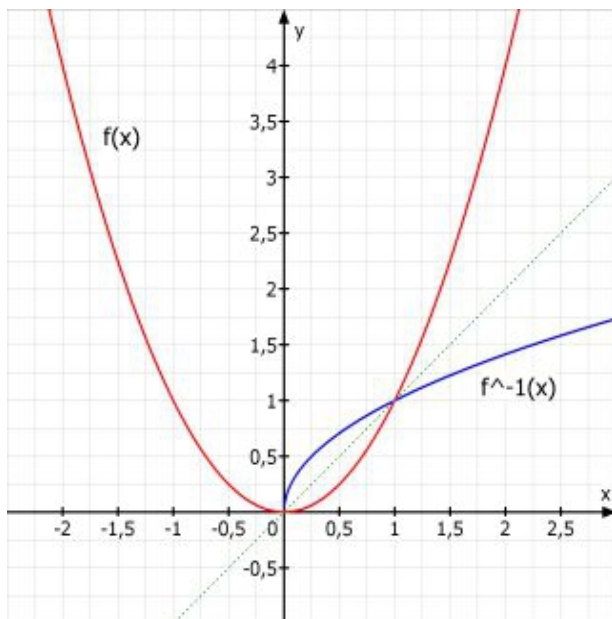


Thema: Das uneigentliche Integral und Anwendung der beiden Verfahren bei einer Integration

Zum Anfang der Stunde haben wir gelernt, wie man mit Rotationskörper um die y-Achse umgehen soll.



Wir müssen den Graphen der Umkehrfunktion um die x-Achse rotieren lassen.

$$f(x) = x^2 = y$$
$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Wir erkennen, dass die Funktion $f(x)$ nur für positive x-Werte umkehrbar ist.

Die Formel des Rotationsvolumens heißt:

$$V = \pi \int_0^{f(2)} (f^{-1}(x)) dx$$

Zur Wiederholung der Umkehrfunktionen haben wir ein weiteres Beispiel benutzt.

$$f(x) = 2x^2 + 1 = y$$

$$2x^2 = y - 1$$

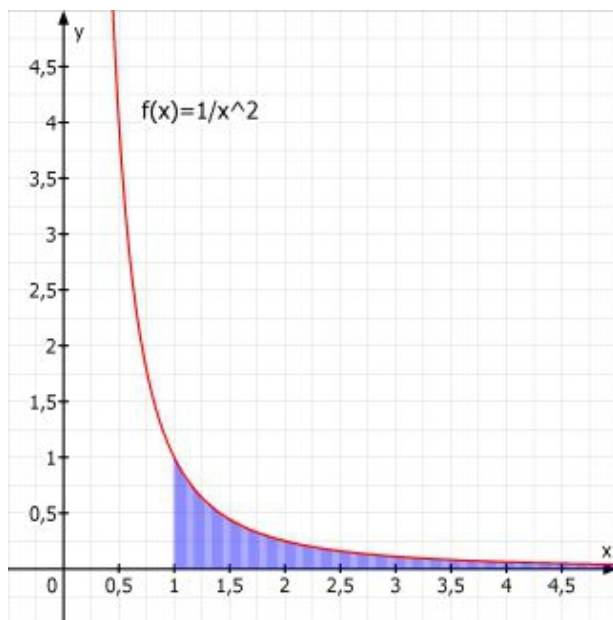
$$x^2 = \frac{y-1}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{y-1}{2}} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

Das uneigentliche Integral

Das Adjektiv „uneigentlich“ bedeutet hier, dass eine der Grenzen des Integrals nicht einsetzbar ist. In den folgenden zwei Beispielen wird die unendliche Grenze durch eine Variable „z“ ersetzt.

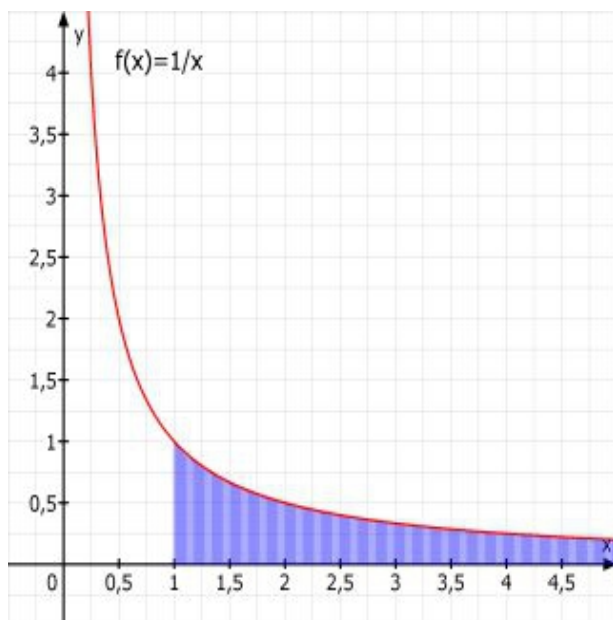
Beispiel 1



$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{x} \right]_1^z$$
$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{z} + 1 \right) = 1 \rightarrow \text{endliche Fläche}$$

Da die Funktion gegen unendlich eine endliche Fläche besitzt, nennt man das Integral auch **konvergent** !

Beispiel 2



$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right) dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z \left(\frac{1}{x}\right) dx = \lim_{z \rightarrow \infty} [\ln(x)]_1^z$$
$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\ln(z) - \ln(1)) \rightarrow \infty$$

Da die Funktion gegen unendlich eine unendliche Fläche besitzt, nennt man das Integral auch **divergent** !

An einem Beispiel aus dem Buch, Seite 33, Aufgabe 11 c) haben wir uns nochmal verinnerlicht, dass für große x-Werte der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ unendlich groß wird.

$$\ln(x) = 100 \rightarrow e^{100} = x = 2,7 \cdot 10^{43} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \infty \quad \text{Damit wird jede theoretische Schranke überschritten.}$$

Hausaufgabenbesprechung

Aufgabe 1

$$\int 6x^2 \cdot 3(2x^3 - 8)^2 = (2x^3 - 8)^3 = F(x)$$

Integration durch Substitution

Aufgabe 2

$$\int (-2x) e^{-x^2} = e^{-x^2} = F(x)$$

Integration durch Substitution

$$\int_{-1}^0 (-2x) e^{-x^2} = 0,632$$

Aufgabe 3

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) 3(\ln(x))^2 = (\ln(x))^3 = F(x)$$

Integration durch Substitution

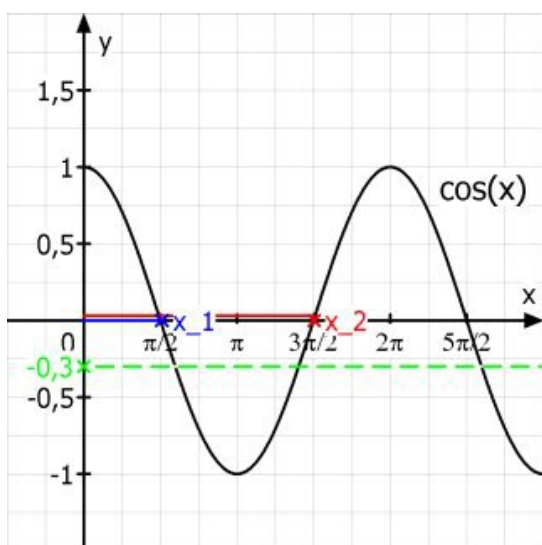
$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) 3(\ln(x))^2 = 0,33$$

Seite 33, Aufgabe 13 i) wird nächste Stunde nochmal besprochen. Die Lösungen zur Orientierung wurden uns im voraus gegeben:

$$f'(x) = \frac{\ln(kx) + 2}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{-\ln(x)}{4x \cdot \sqrt{x}}$$

Danach haben wir nochmal auf das letzte Thema der Trigonometrie zurückgegriffen und haben versucht, die Kosinus-Funktion mit Skizze zu untersuchen.



$$\arccos(-0,3) = 1,875$$

Die Stelle x_2 lässt sich wie folgt ausrechnen:

$$x_2 = \pi + (\pi - x_1) = 2\pi - x_1 = 4,41$$

Zur Probe setzt man das Ergebnis in den $\cos(x)$ ein:

$$\cos(4,41) = -0,3$$

Aus der Symmetrie folgt dann ebenso:

$$2\pi - x_2 = x_1 \rightarrow x_2 = 2\pi - x_1$$

Anwendung beider Verfahren bei einer Integration

Manche Funktionen lassen sich zweierlei durch Substitution und Partielle Integration integrieren.
Wir haben uns eine solcher Funktionen vom Arbeitsblatt Nr. 15 vorgenommen.

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)$$

(1) Integration durch Substitution

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) dx$$

Denkfabrik:

$$g(x) = \ln(x) \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$h(t) = t \qquad H(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$\int f(x) = \int h(g(x)) \cdot g'(x) dx = H(g(x)) = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C = F(x)$$

$$\text{Probe: } F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} = f(x)$$

(2) Integration durch Partielle Integration

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) dx$$

Denkfabrik:

$$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \ln(x)$$

$$h(x) = \ln(x) \qquad h'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int f(x) dx = g(x) \cdot h(x) - \int g(x) \cdot h'(x) dx = \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \ln(x) \frac{1}{x} dx$$

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) dx = \ln^2(x) - \int \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) dx$$

$$2 \int \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) dx = \ln^2(x)$$

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

$$Probe: F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} = f(x)$$

Man erkennt, dass es nicht immer nur einen Lösungsweg geben kann, sondern auch zwei. So ließ sich dieses Integral mit beiden Verfahren bearbeiten.
Dabei ist oft der leichtere Weg der richtigere :)

Hausaufgaben zum 24.01.2014

Seite 33, Aufgabe 13 k)

$$\int_1^2 x^2 (x^3 - 1)^2 dx$$

$$\int_{-2}^0 (x+1)(x^2+2x+2)^2 dx$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) dx$$

$$\int \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \right) dx$$

$$\int \left(\frac{-2x \cdot 1}{(1+x^2)^2} \right) dx$$

6 Abituraufgaben mitbringen