

Name:

Thema: Differenzialgleichungen

Lehrer: C. Schmitt

Bearbeitungszeit: 90 Minuten (2 Unterrichtsstunden)

Hilfsmittel: WTR, Formelsammlung.

Beachte: a) Der Rechenweg muss bei allen Aufgabenstellungen nachvollziehbar sein.
b) Schmierzettel werden nicht eingesammelt
c) Zwei Formpunkte; insgesamt 60+2 Punkte

Aufgaben:

- 1) Entscheiden Sie begründet, welche der Funktionen $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = 3e^x$; $f_3(x) = 3e^{2x}$; $f_4(x) = 2e^{3x}$ die Differenzialgleichung $f'(x) = 2f(x)$ löst .
(2 Punkte)

- 2) Ermitteln Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung $f'(x) = -3f(x)$ (ohne besonderes Verfahren, d.h. im Kopf durch „sinnvolles Probieren“).
Entscheiden Sie, welche der Lösungen die Bedingung $f(0) = 2$ erfüllt.
(3 Punkte)

- 3) Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch **Separation**
 - a) $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$ mit $f(x) \neq 0$
(3 Punkte)

 - b) $f'(x) = -\frac{3 \cdot f(x)}{x}$ für $x > 0$
(4 Punkte)

 - c) $x f'(x) - 3 = f(x)$ mit $x > 0$; $f(x) > 0$
(6 Punkte)

- 4) Skizzieren Sie das **Richtungsfeld** der Differenzialgleichung in Aufgabe 3c), zeichnen Sie eine mögliche Lösungskurve und stellen Sie den Zusammenhang zu Ihrer Lösung in Aufgabe 3c) dar.
(6 Punkte)

- 5) Das Wachstum von Pflanzen kann man mit dem Modell des begrenzten Wachstums beschreiben. Eine Pflanze sei 20cm groß. Sie kann höchstens 30m groß werden. Die Wachstumsrate sei 5% des Unterschiedes zwischen 30m und der jeweiligen Größe. (Einheit auf der Zeitachse ist das Jahr).
 - a) Bestimmen Sie bitte die Funktion, die die Größe der Pflanze beschreibt.
 - b) Berechnen Sie, nach wie viel Jahren die Pflanze eine Größe von 25m erreicht hat. falls Sie in 5a) die Funktion nicht gefunden haben, nehmen Sie als Ersatz!
 $f(t) = 30 - k \cdot e^{-0,04t}$
(10 Punkte)

6) $f(x) \cdot e^x + f'(x) \cdot e^x = -e^{-x} ; x \in \mathbb{R}$

Separation nicht verlangt;

Ermitteln Sie bitte die Lösung der Differenzialgleichung durch Integration.

(mit Probe)

(7 Punkte)

7) Bestimmen Sie alle Funktionen f , für die gilt:

Die Tangente an den Graphen von f an der Stelle x schneidet die x -Achse
an der Stelle $x - 4$

(Zusatzpunkte für Probe, wenn alle anderen Aufgaben bearbeitet)

(7 Punkte)

8) In einer Schule mit 100 Schülern setzt ein Schüler das Gerücht in die Welt, dass die Sommerferien in diesem Jahr 8 Wochen dauern. Schon nach 45min kennen 85 Schüler das Gerücht.

a) Entwickeln Sie bitte eine Differenzialgleichung für die Ausbreitung des Gerüchtes.

(4 Punkte)

b) Bestimmen Sie bitte die Funktion f , welche die Ausbreitung des Gerüchtes beschreibt.

(4 Punkte)

c) Analysieren Sie die Parameter, die in dieser Funktion vorkommen und ermitteln Sie den Wert dieser Parameter; bestimmen Sie dadurch den konkreten Funktionsterm für f .

(4 Punkte)

Nun ist es tatsächlich die letzte Mathematikarbeit Ihrer ganzen Schulzeit!

