

Herzlich Willkommen zum Lernpfad.

Hier geht's lang → https://unterrichten.zum.de/wiki/Nullstellen_bestimmen



Worum geht's?

In der faktorierten Form ist die Bestimmung von Nullstellen von Polynomfunktionen einfacher. Zudem hilft die faktorierte Form beim Kürzen, wenn Zähler und Nenner Polynomfunktionen sind. Beides wird in der Oberstufe dein täglich Brot werden. Also gib Gas und sieh zu, dass du alles gut verstehst und trainierst! Viel Spaß! 😊

1. Faktorisieren durch Ausklammern

Durch Ausklammern kannst du ein Polynom **faktorisieren**. In der faktorierten Form kannst du die Nullstellen durch **Ablezen** und/oder Anwenden der **Mitternachtsformel** bestimmen.

Grund: Satz vom Nullprodukt

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$f(x) = x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Mitternachtsformel

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1$$

$$x_3 = 3$$

Du bist dran!

Notiere hier eine saubere Rechnung zu einer Aufgabe aus dem Lernpfad. Hebe die ermittelten Nullstellen optisch ordentlich hervor!

2. Faktorisieren durch Polynomdivision

2.1 Zerlegungssatz

Bekannt: Du kannst jede Zahl vollständig in Primfaktoren zerlegen.

Beispiel: $90 = 2 \cdot \underbrace{45}_{\text{Primfaktor}} = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Neu: Etwas vergleichbares gibt es bei Polynomen. **Mit den Nullstellen kannst du jedes Polynom faktorisieren!**

Zerlegungssatz

Ist x_1 eine **Nullstelle** einer ganzrationalen Funktion f vom Grad n , dann lässt sich $f(x)$ immer zerlegen in das Produkt $f(x) = \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot g(x)$

Dabei ist $g(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$.

$g(x)$ kann nur wiederum weiter faktorisiert werden, wenn es Nullstellen besitzt.

Beispiele

Folgende Beispiele machen dir klar, wie das zu verstehen ist. Wie man das genau berechnet, lernst du im Anschluss kennen. Dafür muss man nämlich mindestens eine Nullstelle bereits kennen.

Wenn du dich selbst überzeugen willst – *überprüfe mit dem CAS-Rechner und dem Befehl „factor(...)“*

$$f(x) = x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3) = \underbrace{(x - 3) \cdot (x - (-3))}_{\text{Linearfaktoren}}$$

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + x = x \cdot \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{\text{Grad 2}} = x \cdot (x - 1)^2 = \underbrace{(x - 0) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

Grad 3

$$m(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = \underbrace{(x - 1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\text{Grad 2}} = \underbrace{(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

Grad 3

$$s(x) = x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$$

nicht weiter zerlegbar, da keine Nullstelle

Merke

Ein Polynom vom Grad n kann höchstens in _____ Linearfaktoren zerlegt werden.

Ein Polynom vom Grad n hat also höchstens _____ Nullstellen.

Ein **Linearfaktor** hat immer die Form $(x - \text{Nullstelle})$

2.2 mehrfache Nullstellen

Beim Faktorisieren eines Polynoms kann der gleiche Linearfaktor mehrfach auftreten, d.h. eine Nullstelle kommt mehrfach vor:

$$f(x) = x^2 \cdot (x + 3) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) = x^2 \cdot (x + 3) \cdot (x + 1)^3 \cdot (x - 2)^2$$

In diesem Beispiel ist die **3 einfache Nullstelle**, 0 und 2 sind **doppelte Nullstellen** und **-1 ist dreifache Nullstelle**.

mehrfache Nullstellen

Man spricht von einer **k-fachen Nullstelle**, wenn in der vollständig faktorisierten Form eines Funktionsterms der entsprechende **Linearfaktor k-mal vorkommt**. Man erkennt dies meist an der _____ **des zugehörigen Linearfaktors**.

Aus den beiden Sätzen lässt sich ein wichtiges Ergebnis ableiten:

Kennst du zu einer Polynomfunktion n-ten Grades alle n Nullstellen, kannst du es sofort vollständig faktorisieren.

Beispiel:

Polynom 2-ten Grades und 2 Nullstellen

- a) Die Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 10$ hat die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$ (Mitternachtsformel)

Also kannst du sofort sagen: $f(x) = x^2 + 3x - 10 = (x - 2) \cdot (x + 5)$

- b) Die Funktion $f(x) = x^2 - 3x$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ (Ausklammern)

Also kannst du sofort sagen: $f(x) = x^2 - 3x = (x - 0) \cdot (x - 3) = x \cdot (x - 3)$

Wichtig: Steht vor der höchsten Potenz von x (hier x^2) noch ein Faktor, klammere zuerst aus!

- c) Bestimme Faktorisierung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 = \frac{1}{2}(x^2 + x - 12)$

Das Polynoms in der Klammer hat die Nullstellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 3$

Also kannst du sofort sagen:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 = \frac{1}{2}(x^2 + x - 12) = \frac{1}{2}(x + 4)(x - 3)$$

- d) Bestimme Faktorisierung der Funktion $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12 = 3(x^3 - 3x + 4)$

Das Polynoms in der Klammer hat die Nullstellen $x_{1,2} = 2$ und $x_2 = -1$ (könnte man ausrechnen)

Also kannst du sofort sagen:

$$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12 = 3(x^3 - 3x + 4) = 3(x - 2)^2 \cdot (x + 1)$$

Wozu kann ich das brauchen?

Das hilft dir zum Beispiel in der Oberstufe bei gebrochenrationalen Funktionen. Faktorisierst du Zähler und Nenner kannst du nämlich kürzen und den Term schnell vereinfachen!

Beispiel

Aufgabe: Vereinfache den Term $\frac{4x^2+12x-112}{4x \cdot (x+7)}$

Strategie: Faktorisiere den Zähler: $4x^2 + 12x - 112$

Mitternachtsformel liefert die Nullstellen $x_1 = 4$ und $x_2 = -7$

⇒ Zähler in faktorisierter Form: $4x^2 + 12x - 112 = 4 \cdot (x - 4)(x + 7)$

⇒ Vereinfache den Term durch Kürzen

$$\frac{4x^2 + 12x - 112}{4x \cdot (x + 7)} = \frac{4 \cdot (x - 4)(x + 7)}{4x \cdot (x + 7)} \stackrel{x \neq -7}{=} \frac{x - 4}{x}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-7; 0\}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Achtung:

Man darf nur dann mit $(x + 7)$ kürzen, wenn $x \neq -7$ ist.

Ansonsten würde man ja mit 0 kürzen, verboten!

Die beiden Terme sind überall gleich, außer an der Stelle $x = -7$.

Man erkennt das auch daran, dass der linke Term an der Stelle $x = -7$ nicht definiert ist, der rechte hingegen schon.

2.3 Polynomdivision

Wie kommt man nun aber auf die Zerlegung des Polynoms, wenn nur eine Nullstelle bekannt ist?
Dabei hilft das Verfahren der Polynomdivision.

Problem:

Faktoriere das Polynom $x^3 - 2x^2 - x + 2$, wenn nur $x_1 = 1$ als Nullstelle bekannt ist

→ finde also die Zerlegung $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1) \cdot g(x)$

Lösung:

Kennt man eine Nullstelle, so kann man das „restliche“ Polynom $g(x)$ durch Polynomdivision herausfinden:

bekannt: Division

neu: Polynomdivision

$$35 = 5 \cdot g$$

$$g = 35 : 5$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1) \cdot g(x)$$

$$g(x) = (x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x - 1)$$

Vorgehen bei der Polynomdivision:

1. Dividiere höchste Potenz des Dividenten durch höchste Potenz des Divisors

2. Multipliziere zurück

3. Subtrahiere und ziehe herab

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 x^3 : x \\
 -x^2 : x \\
 -2x : x
 \end{array} \\
 (x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x - 1) = x^2 - x - 2 \\
 \begin{array}{r}
 x^2 \cdot (x - 1) \quad \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 -x^2 - x \\
 -x \cdot (x - 1) \quad \underline{-(-x^2 + x)} \\
 -2x + 2 \\
 -2 \cdot (x - 1) \quad \underline{-(-2x + 2)} \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Damit:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 2)$$

Jetzt kann man die erste Nullstelle $x_1 = 1$ ablesen und die beiden anderen mit der Mitternachtsformel berechnen ($x_2 = -1$; $x_3 = 2$).

Nun kannst du vollständig faktorisieren:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

zum Song...☺



3. Mehrfache Nullstellen im Funktionsgraph erkennen

Du hast das Video angesehen. Erstelle nun selbständig einen Hefteintrag dazu, wie die Vielfachheit einer Nullstelle am Graphen erkannt werden kann! Dazu gehört natürlich auch eine Skizze von verschiedenen Fällen!

Zeige den Hefteintrag danach beim Lehrer vor, um sicherzugehen, dass alles passt.

4. gezieltes „Erraten“ ganzzahliger Nullstellen

Ist dir von einem Polynom gar keine Nullstelle bekannt, gibt es manchmal eine Möglichkeit, ganzzahlige Nullstellen gezielt zu „erraten“:

Teilersatz

Besitzt eine Gleichung wie z.B. $x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = 0$ nur ganzzahlige Koeffizienten, so muss jede ganzzahlige Lösung der Gleichung – sofern es eine gibt – ein Teiler des Koeffizienten a_0 sein, in diesem Beispiel also ein Teiler von 3.

Probier's aus:

$$x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow \text{Teiler von 3 sind die Zahlen } \pm 3 \text{ und } \pm 1$$

$$\text{Ist 1 Nullstelle? } 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 1 - 5 + 5 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow 1 \text{ ist keine Nullstelle}$$

$$\text{Ist 3 Nullstelle? } 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 3 = 27 - 45 + 15 + 3 = 0 \Rightarrow 3 \text{ ist eine Nullstelle } \checkmark$$

Damit lässt sich $(x - 3)$ als Linearfaktor abspalten und wir könnten die Polynomdivision durchführen:

$$(x^3 - 5x^2 + 5x + 3) : (x - 3) = \dots$$

Du bist dran!

Finde eine Nullstelle durch „gezieltes Raten“

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$h(x) = x^4 + 3x^3 - x - 1$$

$$i(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$l(x) = x^7 - x - 12$$

$$m(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + \frac{4}{3}$$

Denkaufgabe für Fortgeschrittene

Überlege dir durch das Aufstellen einer allgemeinen Polynomfunktion von Grad 1 (Nullstelle a), dann Grad 2 (Nullstellen a,b) und dann Grad 3 (Nullstellen a,b,c) warum das immer so sein muss!

Kannst du es vielleicht sogar für alle Polynom beweisen?

5. Substitution

von lat. „Ersetzen“

Substitution kann die Lösung von Gleichungen 4. Grades zurückführen auf quadratische Gleichungen.

Sie wird vor allem verwendet bei Polynomen der Form

$$ax^4 + bx^2 + c = a(\color{blue}{x^2})^2 + b(\color{blue}{x^2}) + c = \color{red}{x^2=z} \quad a\color{blue}{z}^2 + b\color{blue}{z} + c$$

Prinzip der Substitution

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$	$\xrightarrow{\text{Substitution: } x^2 = z}$	$f(z) = z^2 - 5z + 4$
		$\downarrow \text{Mitternachtsformel}$
$z_1 = 1 = x^2$		$z_1 = 1$
also <u>$x_{1,2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$</u>	$\xleftarrow{\begin{array}{l} \text{Wir wollen } x \text{ wissen, daher} \\ \text{Rücksubstitution: } z = x^2 \end{array}}$	$z_2 = 4$
$z_2 = 4 = x^2$		
also <u>$x_{3,4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$</u>		