

## Musterklausur für den Leistungsnachweis

|                   |                                                                                                                                              |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Themen:           | Differenzialgleichungen                                                                                                                      |
| Lehrer:           | C. Schmitt                                                                                                                                   |
| Bearbeitungszeit: | 90 Minuten (2 Unterrichtsstunden)                                                                                                            |
| Hilfsmittel:      | WTR ( <b>ohne Grafik; nicht programmierbar</b> ),<br>Formelsammlung.                                                                         |
| Beachte:          | a) Der Rechenweg muss bei allen Aufgabenstellungen nachvollziehbar sein.<br>b) Zwei Formpunkte<br>c) Schmierzettel werden nicht eingesammelt |

### Aufgaben:

- 1) Ein Auto verliert pro Jahr etwa 15% an Wert.  
Berechnen Sie bitte, in welchem Zeitraum der derzeitige Wert eines Autos auf die Hälfte sinkt.

( 2 P )

- 2) Ermitteln Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung  $f'(x) = -\frac{f(x)}{8}$   
(ohne besonderes Verfahren, d.h. im Kopf durch „sinnvolles Probieren“).

Entscheiden Sie, welche der Lösungen die Bedingung  $f(-8) = 2e$  erfüllt.

( 4 P )

- 3) Untersuchen Sie, ob die Funktion  $f(x) = 4 + 2 \cdot e^{-3x}$  die Differenzialgleichung  $f'(x) = 3[4 - f(x)]$  löst.

( 3 P )

- 4) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$f'(x) \cdot f(x) = 2 \cdot e^{2x} \quad \text{durch Separation.}$$

Geben Sie die spezielle Lösung der Gleichung für  $f(0) = 2$  an.

( 4 P )

- 5) Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch **Separation**

a)  $f'(x) = 5x^2 \cdot f(x)$

( 3 P )

b)  $f'(x) - 3x = 4x^2$

( 3 P )

- 6) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot f(x) + 1$$

und zeichnen Sie eine mögliche Lösungskurve.

Entscheiden Sie, welcher Funktionstyp aufgrund Ihrer Zeichnung Lösung sein kann.

(6 P)

7)  $f'(x) \cdot \sqrt{x} + f(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos x \quad \text{für } x > 0$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung  
(Separation nicht verlangt; integrieren und lösen Sie trotzdem;  
Zusatzpunkte für die Probe, falls alle anderen Aufgaben bearbeitet).

( 4 P)

- 8) Bestimmen Sie bitte alle Funktionen  $f$ , für die gilt:  
Die Tangente an den Graphen von  $f$  an der Stelle  $x$  verläuft durch den Punkt  $P(0|-1)$   
( 6 P)

- 9) Ein Teich kann höchstens 1000 Fischen Lebensraum geben. Am Anfang sind nur 10 Fische im Teich. Diese vermehren sich so, dass die Wachstumsrate 10% des Unterschiedes zwischen 1000 und dem betreffenden Fischbestand beträgt. Die Einheit auf der Zeitachse ist das Jahr.

a) Analysieren Sie bitte, welche Funktion den Fischbestand beschreibt. (8 P)

b) Berechnen Sie dann, nach wie vielen Jahren 990 Fische zu erwarten sind. (3 P)

c) Diskutieren Sie auch einen Bestand von 1000 Fischen. (1 P)

10)

Von 6000 isoliert lebenden Menschen (z.B. eines Indianerstamms) infiziert sich eine Person an Grippe. Durch gegenseitige Ansteckung zählt man nach 5 Wochen bereits 400 Kranke.

- a) Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man von logistischem Wachstum der Anzahl  $K$  der Erkrankten aus. Was spricht für diese Annahme?
- b) Bestimmen Sie den Funktionsterm. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Bewohner krank? Welche Bedeutung hat dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit?
- c) Wie groß ist in den ersten 2 Monaten die mittlere Zunahme an Erkrankten pro Woche?
- d) Bestimmen Sie einen Funktionsterm für die Zuwachsrate
- e) In welcher Woche gibt es 2 Neuerkrankungen? (20 P)

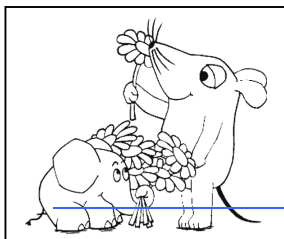
11) Newtonsches Abkühlungsgesetz

Ein Körper sei wärmer als seine Umgebung. Seine Temperatur  $\vartheta$  ist eine Funktion der Zeit  $\vartheta = f(t)$ . Die Abkühlungsrate  $f'(t)$  ist proportional der Differenz von Temperatur  $\vartheta$  des Körpers und der Umgebungstemperatur  $\vartheta_U$ .

a) Stellen Sie die Differenzialgleichung auf. Geben Sie eine spezielle Lösung unter Verwendung der Anfangstemperatur  $\vartheta_0$  an.

b) Ein Körper kühle sich in 10 min von 400°C auf 300°C ab, wobei die Umgebungstemperatur  $\vartheta_U$  20°C ist.

Wann hat sich der Körper auf 50°C abgekühlt? (15 P)



insgesamt 82+2 Punkte  
Das wird die letzte Mathematikarbeit Ihrer ganzen Schulzeit!