

Lösungen zu S. 20 Nr. 6:

Vorüberlegungen:

Alle 5 Körper haben das gleiche kreisrunde Bohrloch mit einem Durchmesser $d = \frac{a}{2}$, also einem Radius $r = \frac{a}{4}$ und der Höhe $2a$. Um das Volumen des Körpers zu berechnen, muss das Volumen des Bohrloches (bzw. des Zylinders) jeweils abgezogen werden. Dieses wird mit folgender

Formel berechnet: $V_{\text{Zylinder}} = \pi \left(\frac{a}{4} \right)^2 \cdot 2a = \pi \cdot \frac{a^2}{16} \cdot 2a = \frac{\pi}{8} a^3$.

Bei der Berechnung des Oberflächeninhalts muss beachtet werden, dass hierzu auch die Mantelfläche des Bohrloches, also die Mantelfläche des inneren Zylinders zählt! Diese berechnet sich mit folgender Formel: $M_{\text{Zylinder}} = 2\pi \cdot \frac{a}{4} \cdot 2a = \pi \cdot a^2$.

1. Körper:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Quader}} - V_{\text{Zylinder}} \\ &= a^2 \cdot 2a - \frac{\pi}{8} a^3 = 2a^3 - \frac{\pi}{8} a^3 = \left(2 - \frac{\pi}{8} \right) a^3 \end{aligned}$$

einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$V = \left(2 - \frac{\pi}{8} \right) \cdot 4^3 \text{ cm}^3 = \left(2 - \frac{\pi}{8} \right) \cdot 64 \text{ cm}^3 \approx 102,87 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} O &= 2(G_{\text{Quader}} - G_{\text{Zylinder}}) + M_{\text{Quader}} + M_{\text{Zylinder}} \\ &= 2 \cdot \left(a^2 - \frac{\pi}{16} a^2 \right) + 4 \cdot 2a^2 + \pi a^2 \\ &= 2a^2 - \frac{\pi}{8} a^2 + 8a^2 + \pi a^2 = \left(2 - \frac{\pi}{8} + 8 + \pi \right) \cdot a^2 = \left(10 + \frac{7}{8} \pi \right) \cdot a^2 \end{aligned}$$

einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$O = \left(10 + \frac{7}{8} \pi \right) \cdot 4^2 \text{ cm}^2 = \left(10 + \frac{7}{8} \pi \right) \cdot 16 \text{ cm}^2 \approx 203,98 \text{ cm}^2$$

2. Körper:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Quader}} - V_{\text{Zylinder}} \\ &= 15a^2 \cdot 2a - \frac{\pi}{8}a^3 = 3a^3 - \frac{\pi}{8}a^3 = \left(3 - \frac{\pi}{8}\right)a^3 \end{aligned}$$

einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$V = \left(3 - \frac{\pi}{8}\right) \cdot 64\text{cm}^3 \approx 166,87\text{cm}^3$$

$$\begin{aligned} O &= 2(G_{\text{Quader}} - G_{\text{Zylinder}}) + M_{\text{Quader}} + M_{\text{Zylinder}} \\ &= 2 \cdot \left(15a^2 - \frac{\pi}{16}a^2\right) + \left(2 \cdot 2a^2 + 2 \cdot 3a^2\right) + \pi a^2 \\ &= 3a^2 - \frac{\pi}{8}a^2 + 10a^2 + \pi a^2 = \left(3 - \frac{\pi}{8} + 10 + \pi\right) \cdot a^2 = \left(13 + \frac{7}{8}\pi\right) \cdot a^2 \end{aligned}$$

einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$O = \left(13 + \frac{7}{8}\pi\right) \cdot 16\text{cm}^2 \approx 251,98\text{cm}^2$$

3. Körper:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Zylinder, außen}} - V_{\text{Zylinder, innen}} \\ &= \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 2a - \frac{\pi}{8}a^3 = \frac{\pi}{2}a^3 - \frac{\pi}{8}a^3 = \frac{3}{8}\pi a^3 \end{aligned}$$

einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$V = \frac{3}{8}\pi \cdot 64\text{cm}^3 \approx 75,4\text{cm}^3$$

$$\begin{aligned} O &= 2(G_{\text{Zylinder, außen}} - G_{\text{Zylinder, innen}}) + M_{\text{Zylinder, außen}} + M_{\text{Zylinder, innen}} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}a^2 - \frac{\pi}{16}a^2\right) + 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a + \pi a^2 \\ &= 2 \cdot \frac{3}{16}\pi a^2 + 2\pi a^2 + \pi a^2 = \left(\frac{3}{8}\pi + 2\pi + \pi\right) \cdot a^2 = \frac{27}{8}\pi a^2 \end{aligned}$$

einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$O = \frac{27}{8}\pi \cdot 16\text{cm}^2 \approx 169,65\text{cm}^2$$

4. Körper:

$$V = V_{\text{Prisma}} - V_{\text{Zylinder}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot 2a - \frac{\pi}{8} a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3 - \frac{\pi}{8} a^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{8} \right) a^3$$

einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$V = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot 64\text{cm}^3 \approx 30,29\text{cm}^3$$

$$O = 2(G_{\text{Prisma}} - G_{\text{Zylinder}}) + M_{\text{Prisma}} + M_{\text{Zylinder}}$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - \frac{\pi}{16} a^2 \right) + 3 \cdot 2a^2 + \pi a^2$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 - \frac{\pi}{8} a^2 + 6a^2 + \pi a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 6 + \frac{7}{8} \pi \right) \cdot a^2$$

einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$O = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 6 + \frac{7}{8} \pi \right) \cdot 16\text{cm}^2 \approx 153,84\text{cm}^2$$

5. Körper:

$$V = V_{\text{Prisma}} - V_{\text{Zylinder}}$$
$$= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} a^2 \cdot 2a - \frac{\pi}{8} a^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^3 - \frac{\pi}{8} a^3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8} \right) a^3$$

einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$V = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot 64\text{cm}^3 \approx 58,01\text{cm}^3$$

$$O = 2(G_{\text{Prisma}} - G_{\text{Zylinder}}) + M_{\text{Prisma}} + M_{\text{Zylinder}}$$
$$= 2 \cdot \left(6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} a^2 - \frac{\pi}{16} a^2 \right) + 6 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot 2a \right) + \pi a^2$$
$$= 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} a^2 - \frac{\pi}{8} a^2 + 6a^2 + \pi a^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + 6 + \frac{7}{8} \pi \right) \cdot a^2$$

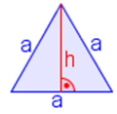
einsetzen von $a=4\text{cm}$:

$$O = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + 6 + \frac{7}{8} \pi \right) \cdot 16\text{cm}^2 \approx 160,77\text{cm}^2$$

NR:

Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a :

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



Flächeninhalt im gleichseitigen Dreieck:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

NR:

Ein regelmäßiges Sechseck kann in 6 gleichseitige Dreiecke zerlegt werden.

Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge $\frac{a}{2}$:

$$h = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Flächeninhalt im gleichseitigen Dreieck:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h = \frac{1}{4} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a = \frac{\sqrt{3}}{16} a^2$$