

Abi Aufgabe A5 (Musteraufgabe)

a.

$$f_t(x) = \frac{t + \ln(x)}{x}$$

$$f'_t(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (t + \ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - t + \ln(x)}{x^2}$$

$$f''_t(x) = \frac{-3 + 2t + 2 \ln(x)}{x^3}$$

$$f'''_t(x) = \frac{11 - 6t - 6 \ln(x)}{x^4}$$

Aufgabe a :

Nullstellen: $0 = t + \ln(x)$

$$x = (e^{-t}/0)$$

$$-t = \ln(x)$$

$$x = e^{-t}$$

$f_t(0)$ bzw. Y existiert nicht

Extremstellen: $0 = 1 - t - \ln(x)$

$$f_t(e^{1-t}) = e^{t-1}$$

$$\ln(x) = 1 - t$$

$$x = e^{1-t}$$

$$f''_t(e^{1-t}) = \frac{-3 + 2t + 2 \ln(e^{1-t})}{e^{(1-t)^3}} = \frac{-3 + 2t + 2 - 2t}{e^{(1-t)^3}} = -\frac{1}{e^{(1-t)^3}} < 0$$

$$\text{HP} : (e^{1-t}/e^{t-1})$$

Wendestellen: $0 = -3 + 2t + 2\ln(x)$

$x = e^{1,5-t}$

$3 = 2t + 2\ln(x)$

$1,5 - t = \ln(x)$

$f_t(e^{1,5-t}) = 1,5 e^{t-1,5}$

WS: $(e^{1,5-t}/1,5 e^{t-1,5})$

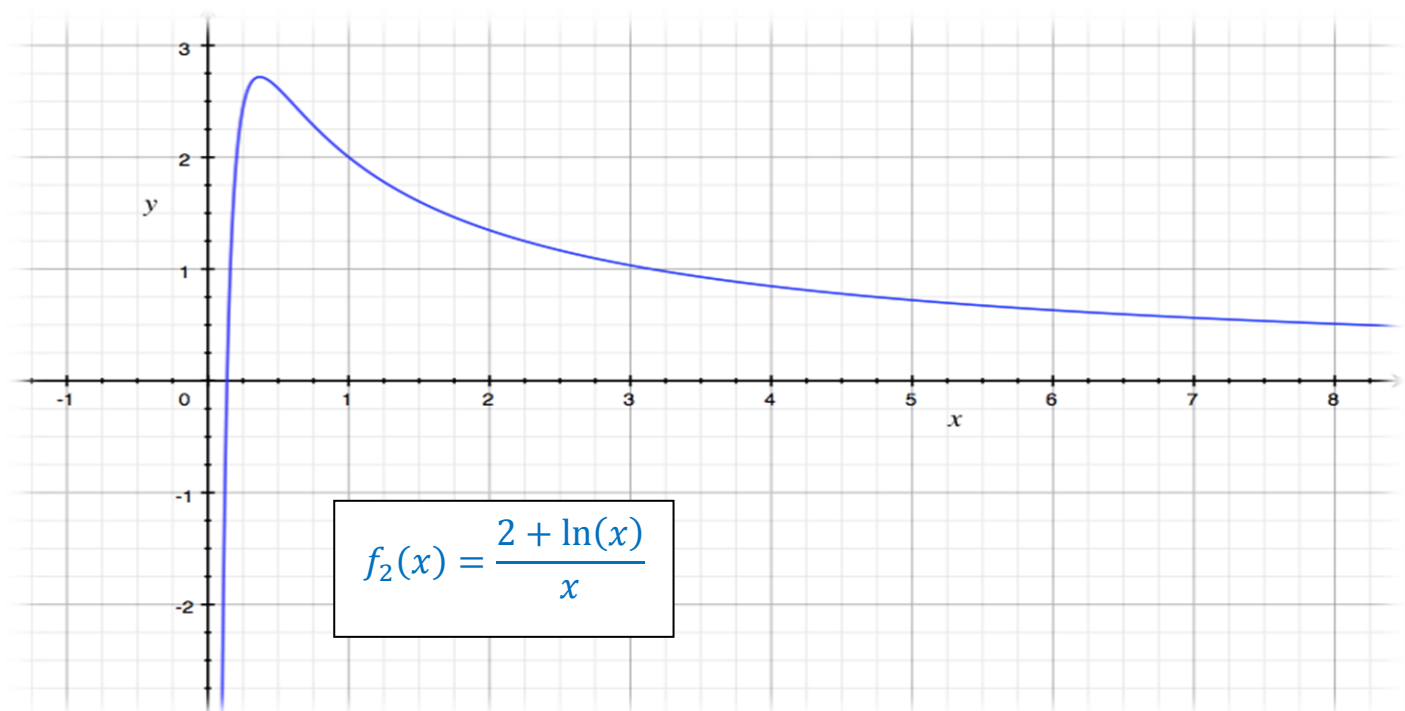
$f_t'''(e^{1,5-t}) = \frac{11-6t-6\ln(e^{1,5-t})}{e^{(1,5-t)^4}} = \frac{11-6t-9+6t}{e^{(1,5-t)^4}} = \frac{2}{e^{(1,5-t)^4}} > 0$ rechts-links Kurve

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{t+\ln(x)}{x} \right) \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+\ln(x)}{x} \right) \rightarrow 0$

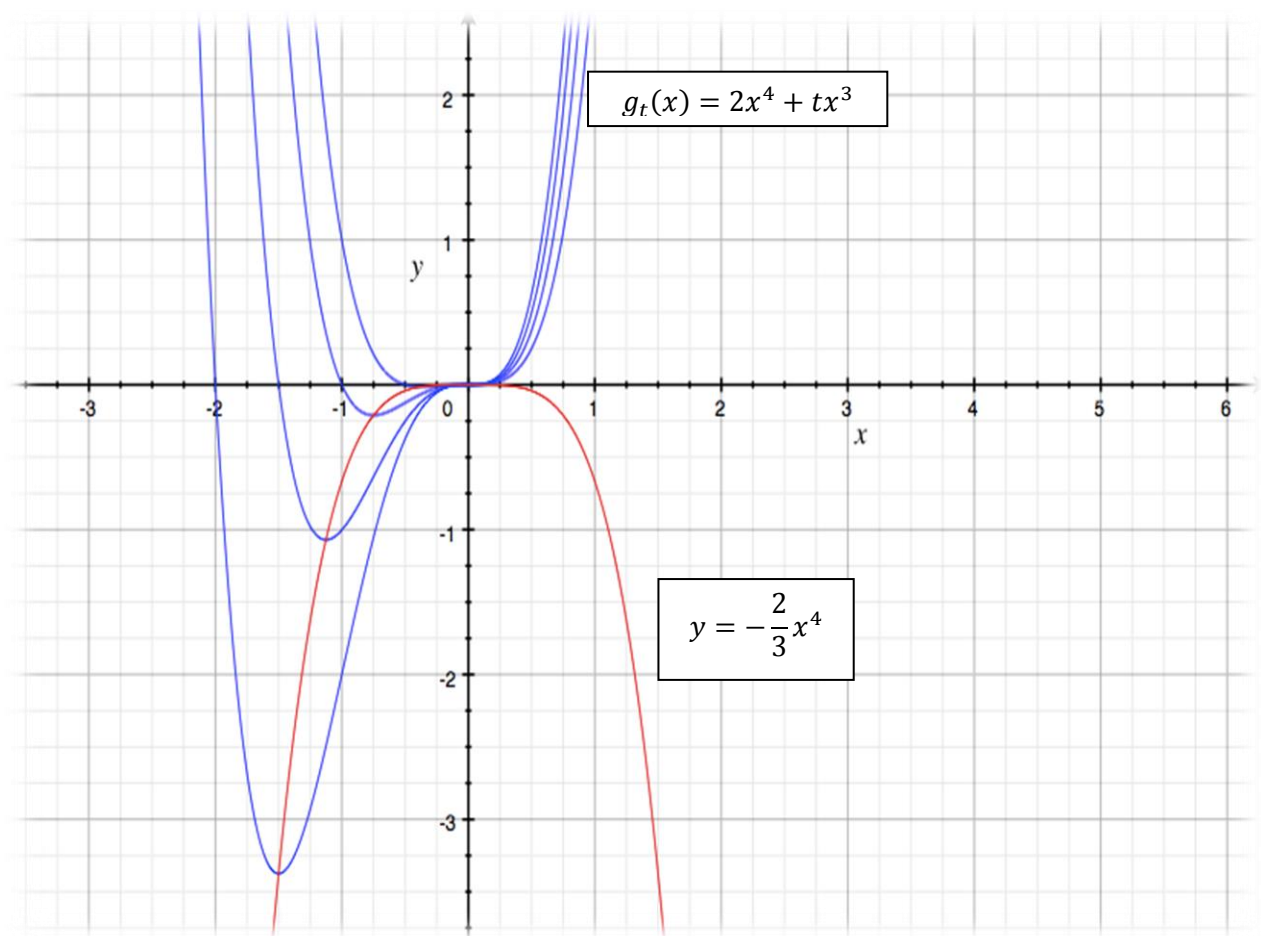
$f_t(0,00000001) = \frac{t+\ln(0,00000001)}{0,00000001} \approx -18,4 \cdot 10^8$

$f_t(100000000) = \frac{t+100000000}{100000000} \approx 1,61 \cdot 10^{-6}$



b.

y im 3.Schritt ist eine Ortslinie, die durch den Tiefpunkt von $g_t(x)$ verläuft. y verbindet also alle Tiefpunkte von der Kurvenschar.



$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{8}t\right)^4 = -\frac{27}{2048}t^4 = y\text{-Wert vom HP}$$

Bew. $x(t) \rightarrow t \rightarrow y$

$$HP: (e^{1-t}/e^{t-1})$$

$$e^{1-\ln(x)-1} = \frac{1}{x} = p(x)$$

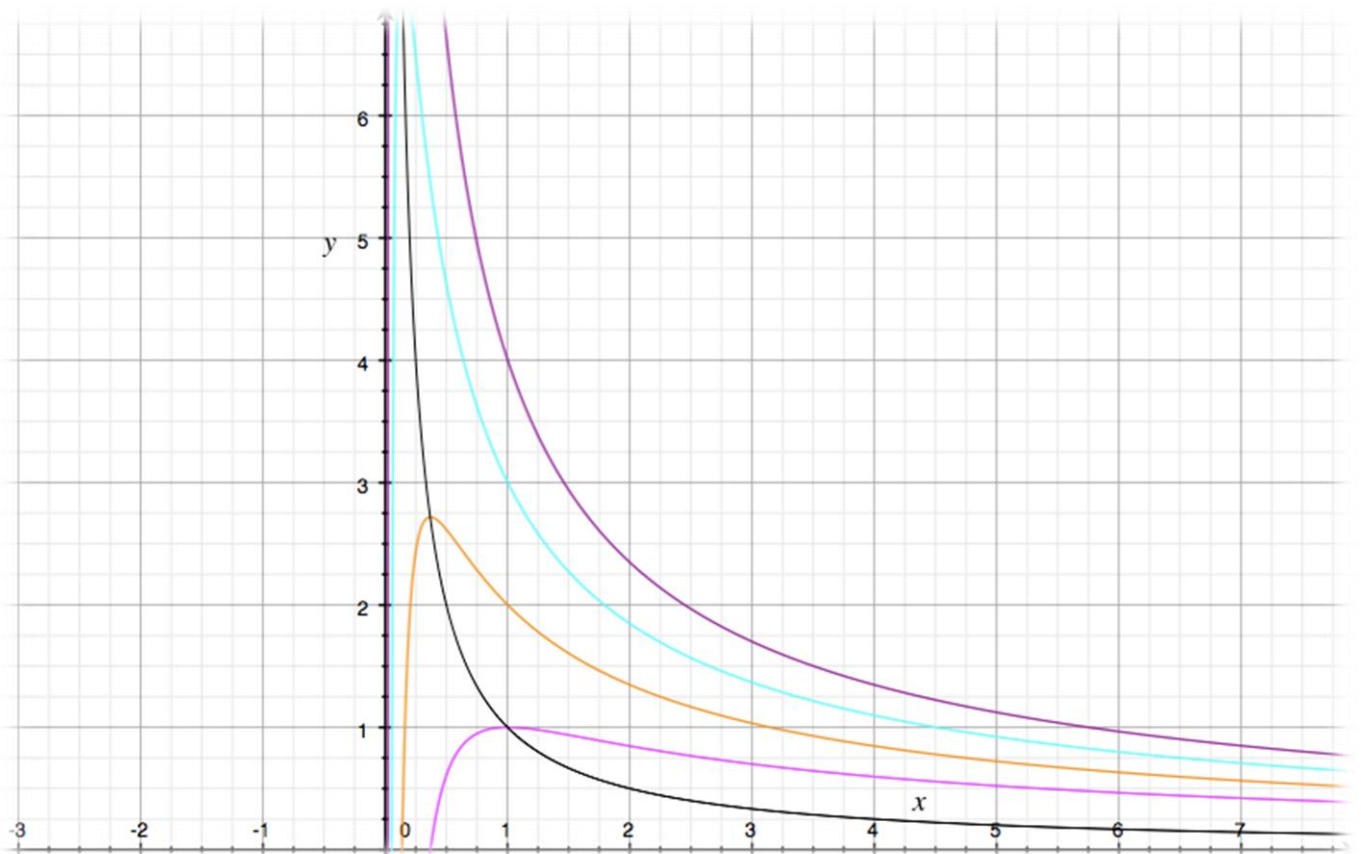
$$x = e^{1-t}$$

$$t = 1 - \ln(x)$$

$\frac{1}{x}$ ist die Ortslinie, die die Hochpunkte der Kurvenschar $f_t(x)$ verbindet.

Das bedeutet wenn man den x-Wert des HP in den Graphen der Ortslinie einfügt, dann muss das Ergebnis der y-Wert des Hochpunktes sein.

$$p(e^{1-t}) = \frac{1}{e^{1-t}} = e^{t-1}$$



c.

$$f_t(x) = \frac{t + \ln(x)}{x} = \frac{t}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

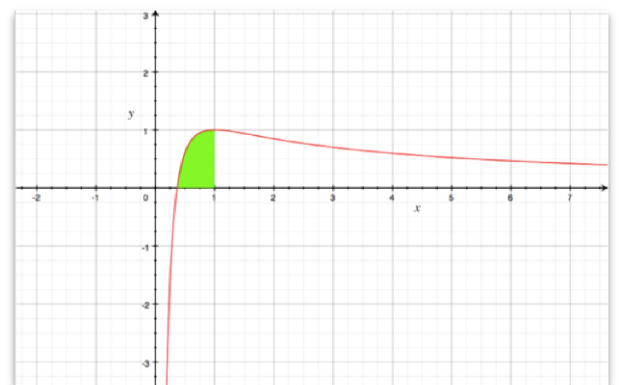
$$\int_{e^{-t}}^{e^{1-t}} \left(\frac{t}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) dx = \left[t \cdot \ln(x) + \frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_{e^{-t}}^{e^{1-t}}$$

$$= \left[\frac{2t \ln(x) + (\ln(x))^2}{2} \right]_{e^{-t}}^{e^{1-t}}$$

$$= \left(\frac{2t \cdot (1-t) + (1-t)^2}{2} \right) - \left(\frac{2t \cdot (-t) + (-t)^2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{2t - 2t^2 + 1 - 2t + t^2}{2} \right) + \left(\frac{2t^2 - t^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$



Egal was man für t einsetzt, in den Grenzen von e^{-t} bis e^{1-t} , ergibt sich in allen Kurvenschars die Fläche $\frac{1}{2}$.

d.

$$\pi \int_{e^{-2}}^h (f_2(x))^2 dx = \pi \int_{e^{-2}}^h \left(\frac{2 + \ln(x)}{x} \right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{e^{-2}}^h \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4 \ln(x)}{x^2} + \frac{(\ln(x))^2}{x^2} \right) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{4}{x} - \frac{4 \ln(x) - 4}{x} - \frac{(\ln(x))^2 - 2 \ln(x) - 2}{x} \right]_{e^{-2}}^h$$

$$= \pi \left[\frac{-4 - 4 \ln(x) - 4 - (\ln(x))^2 - 2 \ln(x) - 2}{x} \right]_{e^{-2}}^h$$

$$= \pi \left[\frac{-10 - 6 \ln(x) - (\ln(x))^2}{x} \right]_{e^{-2}}^h$$

Um diese Aufgabe näherungsweise zu lösen muss man verschiedene Werte für h einsetzen.

h=600

$$\pi \int_{e^{-2}}^{600} \left(\frac{2 + \ln(x)}{x} \right)^2 = \pi \left[\frac{-10 - 6 \ln(x) - (\ln(x))^2}{x} \right]_{e^{-2}}^{600}$$

$$\pi \left[\left(\frac{-10 - 6 \ln(600) - (\ln(600))^2}{600} \right) - \left(\frac{-10 - 6 \ln(e^{-2}) - (\ln(e^{-2}))^2}{e^{-2}} \right) \right]$$

$$\pi(-0.15 + 14.77) \approx 45,93$$

h=800

$$\pi \int_{e^{-2}}^{800} \left(\frac{2 + \ln(x)}{x} \right)^2 = \pi \left[\frac{-10 - 6 \ln(x) - (\ln(x))^2}{x} \right]_{e^{-2}}^{800}$$

$$\pi \left[\left(\frac{-10 - 6 \ln(800) - (\ln(800))^2}{800} \right) - \left(\frac{-10 - 6 \ln(e^{-2}) - (\ln(e^{-2}))^2}{e^{-2}} \right) \right]$$

$$\pi(-0.12 + 14.77) \approx 46,03$$

h=1000

$$\pi \int_{e^{-2}}^{1000} \left(\frac{2 + \ln(x)}{x} \right)^2 = \pi \left[\frac{-10 - 6 \ln(x) - (\ln(x))^2}{x} \right]_{e^{-2}}^{1000}$$

$$\pi \left[\left(\frac{-10 - 6 \ln(1000) - (\ln(1000))^2}{1000} \right) - \left(\frac{-10 - 6 \ln(e^{-2}) - (\ln(e^{-2}))^2}{e^{-2}} \right) \right]$$

$$\pi(-0.1 + 14.77) \approx 46,1$$

Man erkennt, dass die vielen Großen Werte immer ein Ergebnis um 50 ergeben. Das heißt, dass das Volumen der Karaffe ungefähr 50 sein muss.