

## Musterklausur für Leistungsnachweis Nr. 3

|                   |                                                                                                                                              |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Themen:           | Differenzialgleichungen                                                                                                                      |
| Lehrer:           | C. Schmitt                                                                                                                                   |
| Bearbeitungszeit: | 90 Minuten (2 Unterrichtsstunden)                                                                                                            |
| Hilfsmittel:      | Taschenrechner ( <b>ohne Grafik; nicht programmierbar</b> ),<br>Formelsammlung.                                                              |
| Beachte:          | a) Der Rechenweg muss bei allen Aufgabenstellungen nachvollziehbar sein.<br>b) Zwei Formpunkte<br>c) Schmierzettel werden nicht eingesammelt |

### Aufgaben:

- 1) Ein Auto verliert pro Jahr etwa 15% an Wert.  
Berechnen Sie bitte, in welchem Zeitraum der derzeitige Wert eines Autos auf die Hälfte sinkt.

( 2 P )

- 2) Ermitteln Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung  $f'(x) = -\frac{f(x)}{8}$   
(ohne besonderes Verfahren, d.h. im Kopf durch „sinnvolles Probieren“).

Entscheiden Sie, welche der Lösungen die Bedingung  $f(-8) = 2e$  erfüllt.

( 4 P )

- 3) Untersuchen Sie, ob die Funktion  $f(x) = 4 + 2 \cdot e^{-3x}$  die Differenzialgleichung  $f'(x) = 3[4 - f(x)]$  löst.

( 3 P )

- 4) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$f'(x) \cdot f(x) = 2 \cdot e^{2x} \quad \text{durch Separation.}$$

Geben Sie die spezielle Lösung der Gleichung für  $f(0) = 2$  an.

( 4 P )

- 5) Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch **Separation**

a)  $f'(x) = 5x^2 \cdot f(x)$

( 3 P )

b)  $f'(x) - 3x = 4x^2$

( 3 P )

- 6) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot f(x) + 1$$

und zeichnen Sie eine mögliche Lösungskurve.

Entscheiden Sie, welcher Funktionstyp aufgrund Ihrer Zeichnung Lösung sein kann.

(6 P)

7)  $f'(x) \cdot \sqrt{x} + f(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos x \quad \text{für } x > 0$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung  
(Separation nicht verlangt; integrieren und lösen Sie trotzdem;  
Zusatzpunkte für die Probe, falls alle anderen Aufgaben bearbeitet).

( 4 P)

- 8) Bestimmen Sie bitte alle Funktionen  $f$ , für die gilt:  
Die Tangente an den Graphen von  $f$  an der Stelle  $x$  verläuft durch den Punkt  $P(0|-1)$   
( 6 P)

- 9) Ein Teich kann höchstens 1000 Fischen Lebensraum geben. Am Anfang sind nur 10 Fische im Teich. Diese vermehren sich so, dass die Wachstumsrate 10% des Unterschiedes zwischen 1000 und dem betreffenden Fischbestand beträgt. Die Einheit auf der Zeitachse ist das Jahr.

a) Analysieren Sie bitte, welche Funktion den Fischbestand beschreibt. (8 P)

b) Berechnen Sie dann, nach wie vielen Jahren 990 Fische zu erwarten sind. (3 P)

c) Diskutieren Sie auch einen Bestand von 1000 Fischen. (1 P)

insgesamt 47+2 Punkte

Das wird die letzte Mathematikarbeit Ihrer ganzen Schulzeit!

