Faktorisieren und Nullstellen - Lernpfad

Arbeitsblatt Nummer: ____
Datum: ________________

2. Faktorisieren durch Polynomdivision

2.1 Zerlegungssatz

Bekannt: Du kannst jede Zahl vollständig in Primfaktoren zerlegen.

Beispiel: $90 = \underbrace{2}_{\text{Primfaktor}} \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Neu: Etwas vergleichbares gibt es bei Polynomen. **Mit den Nullstellen kannst du jedes Polynom faktorisieren!**

Zerlegungssatz

Ist x_1 eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion f vom Grad n, dann lässt sich $f(x)$ immer zerlegen in das Produkt $f(x) = \underbrace{(x - x_1)}_{\textit{Linearfaktor}} \cdot g(x)$

Dabei ist $g(x)$ ein Polynom vorm Grad $n - 1$.

$g(x)$ *kann* nur wiederum weiter faktorisiert werden, wenn es Nullstellen besitzt.

Beispiele

Folgende Beispiele machen dir klar, wie das zu verstehen ist. Wie man das genau berechnet, lernst du im Anschluss kennen. Dafür muss man nämlich mindestens eine Nullstelle bereits kennen.

Wenn du dich selbst überzeugen willst – *überprüfe mit dem CAS-Rechner und dem Befehl „factor(…)“*

$$f(x) = x^2 - 9 = (x-3) \cdot (x+3) = \underbrace{(x-3) \cdot (x-(-3))}_{\textit{Linearfaktoren}}$$

$$g(x) = \underbrace{x^3 - 2x^2 + x}_{\textit{Grad 3}} = x \cdot \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{\textit{Grad 2}} = x \cdot (x-1)^2 = \underbrace{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-1)}_{\textit{Linearfaktoren}}$$

$$m(x) = \underbrace{x^3 - 2x^2 - x + 2}_{\textit{Grad 3}} = \underbrace{(x-1)}_{\textit{Linearfaktor}} \cdot \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\textit{Grad 2}} = \underbrace{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2)}_{\textit{Linearfaktoren}}$$

$$s(x) = x^3 + x = x \cdot \underbrace{(x^2 + 1)}_{\textit{nicht weiter zerlegbar, da keine Nullstelle}}$$

Merke

Ein Polynom vom Grad n kann höchstens in _____ Linearfaktoren zerlegt werden.

Ein Polynom vom Grad n hat also höchstens ____ Nullstellen.

Ein Linearfaktor hat immer die Form $(x - Nullstelle)$

2.2 mehrfache Nullstellen

Beim Faktorsieren eines Polynoms kann der gleiche Linearfaktor mehrfach auftreten, d.h. eine Nullstelle kommt mehrfach vor:

$$f(x) = x^2 \cdot (x+3) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-2) = x^2 \cdot (x+3) \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$$

In diesem Beispiel ist die 3 einfache Nullstelle, 0 und 2 sind doppelte Nullstellen und -1 ist dreifache Nullstelle.

mehrfache Nullstellen

Man spricht von einer **k-fachen Nullstelle**, wenn in der vollständig faktorisierten Form eines Funktionsterms der entsprechende **Linearfaktor k-mal vorkommt**. Man erkennt dies meist an der ______________ **des zugehörigen Linearfaktors**.

Aus den beiden Sätzen lässt sich ein wichtiges Ergebnis ableiten:

Kennst du zu einer Polynomfunktion n-ten Grades alle n Nullstellen, kannst du es sofort vollständig faktorisieren.

Beispiel:

Polynom 2-ten Grades und 2 Nullstellen

a) Die Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 10$ hat die Nullstellen $\boldsymbol{x_1 = 2}$ und $\boldsymbol{x_2 = -5}$ *(Mitternachtsformel)*

Also kannst du sofort sagen: $f(x) = x^2 + 3x - 10 = (x-2) \cdot (x+5)$

b) Die Funktion $f(x) = x^2 - 3x$ hat die Nullstellen $\boldsymbol{x_1 = 0}$ und $\boldsymbol{x_2 = 3}$ *(Ausklammern)*

Also kannst du sofort sagen: $f(x) = x^2 - 3x = (x-0) \cdot (x-3) = x \cdot (x-3)$

Wichtig: Steht vor der höchsten Potenz von x (hier x^2) noch ein Faktor, klammere zuerst aus!

c) Bestimme Faktorisierung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 = \frac{1}{2}(x^2 + x - 12)$

Das Polynoms in der Klammer hat die Nullstellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 3$

Also kannst du sofort sagen:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 = \frac{1}{2}(x^2 + x - 12) = \frac{1}{2}(x+4)(x-3)$$

d) Bestimme Faktorisierung der Funktion $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12 = 3(x^3 - 3x + 4)$

Das Polynoms in der Klammer hat die Nullstellen $x_{1,2} = 2$ und $x_2 = -1$ *(könnte man ausrechnen)*

Also kannst du sofort sagen:

$$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12 = 3(x^3 - 3x + 4) = 3(x-2)^2 \cdot (x+1)$$

Wozu kann ich das brauchen?
Das hilft dir zum Beispiel in der Oberstufe bei gebrochenrationalen Funktionen. Faktorisierst du Zähler und Nenner kannst du nämlich kürzen und den Term schnell vereinfachen!

Beispiel

Aufgabe: Vereinfache den Term $\frac{4x^2+12x-112}{4x\cdot(x+7)}$

Strategie: Faktorisiere den Zähler: $4x^2 + 12x - 112$

Mitternachtsformel liefert die Nullstellen $x_1 = 4$ und $x_2 = -7$

⇒ Zähler in faktorisierter Form: $4x^2 + 12x - 112 = 4 \cdot (x-4)(x+7)$

⇒ Vereinfache den Term durch Kürzen

$$\underbrace{\frac{4x^2 + 12x - 112}{4x \cdot (x+7)}}_{D = \mathbb{R}\backslash\{-7;0\}} = \frac{4 \cdot (x-4)(x+7)}{4x \cdot (x+7)} \overset{x \neq -7}{=} \underbrace{\frac{x-4}{x}}_{D = \mathbb{R}\backslash\{0\}}$$

Achtung:
Man darf nur dann mit $(x+7)$ kürzen, wenn $x \neq -7$ ist.
Ansonsten würde man ja mit 0 kürzen, verboten!
Die beiden Terme sind überall gleich, außer an der Stelle $x = -7$.
Man erkennt das auch daran, dass der linke Term an der Stelle $x = -7$ nicht definiert ist, der rechte hingegen schon.